

Themenblock 11: Das Pascalsche Dreieck

Wir bestimmen $(a + b)^n$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ und schreiben die Resultate geeignet untereinander.

$$\begin{array}{rcccccccc}
 n & & & & & & & & (a + b)^n \\
 0 & & & & & & & & 1 \\
 1 & & & & & & 1a & + & 1b \\
 2 & & & & 1a^2 & + & 2ab & + & 1b^2 \\
 3 & & 1a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & 1b^3 \\
 4 & \dots & \dots & \dots & & & & &
 \end{array}$$

Die Terme der Potenzen von $(a + b)$ haben folgende Eigenschaften:

- Die Exponenten sind symmetrisch; ihre Summe ist bei jedem Glied gleich n .
- Die Exponenten von a fallen von n auf 0; diejenigen von b steigen von 0 auf n !
- Die Koeffizienten („fette“ Zahlen) bilden das Pascalsche Dreieck! Sie sind in jeder Zeile symmetrisch. Die erste und letzte Zahl ist immer eine 1. Die anderen ergeben sich aus der Summe ihrer beiden „Vorgänger“... ☺

1. Anwendungsbeispiel

$$\begin{aligned}
 (3x + 5)^3 &= 1 \cdot (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (3x) \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 \\
 &= 27x^3 + 3 \cdot 9x^2 \cdot 5 + 3 \cdot 3x \cdot 25 + 125 \\
 &= \underline{27x^3 + 135x^2 + 225x + 125}
 \end{aligned}$$

2. Anwendungsbeispiel

$$\begin{aligned}
 (4a - 2)^4 &= 1 \cdot (4a)^4 - 4 \cdot (4a)^3 \cdot 2 + 6 \cdot (4a)^2 \cdot 2^2 - 4 \cdot (4a) \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 \\
 &= 256a^4 - 4 \cdot 64a^3 \cdot 2 + 6 \cdot 16a^2 \cdot 4 - 4 \cdot 4a \cdot 8 + 16 \\
 &= \underline{256a^4 - 512a^3 + 384a^2 - 128a + 16}
 \end{aligned}$$

Übungsbeispiele:

1. $(x + 10)^3 =$
2. $(a - 3)^4 =$
3. $(2x + 1)^5 =$
4. $(3y - 2)^3 =$
5. $(5b + 1)^4 =$
6. $(6x - \frac{1}{2})^5 =$
7. $(2x^3 + y)^3 =$
8. $(a^4 - 3b^2)^4 =$