

Der Funktionsbegriff

Eine Funktion drückt die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen aus. Traditionell werden Funktionen als Regel oder Vorschrift definiert, die eine Eingangsgröße (Argument, meist x) in eine Ausgangsgröße (Funktionswert, meist y) transformiert (überführt).

Schreibweise: $f: A \rightarrow B, \quad x \mapsto y = f(x)$

Die Ausgangsmenge A heißt **Definitionsmenge** D_f der Funktion f . Ihre Elemente bezeichnet man häufig mit x . Ohne ausdrückliche Einschränkung meint D die größtmögliche Definitionsmenge in $\mathbb{R}$.

Die Menge B heißt Wertevorrat. Die Menge der zugeordneten Elemente, eine Teilmenge von B , nennt man **Wertemenge** W_f der Funktion f . Ihre Elemente bezeichnet man häufig mit y ; man nennt y Funktionswert von x .

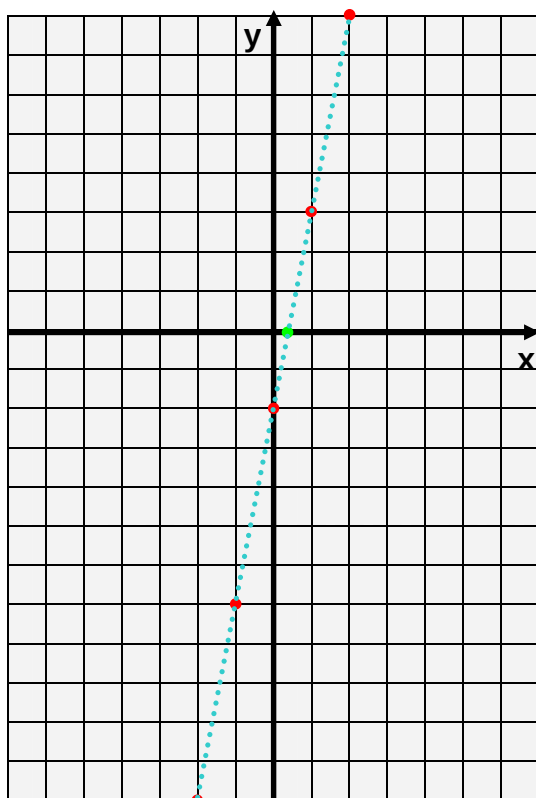
Als **Nullstelle** einer Funktion f bezeichnet man eine Stelle mit dem Funktionswert 0. d.h. x_0 ist Nullstelle von $f \Leftrightarrow f(x_0) = 0$.

Beispiel: $y = f(x) = 5x - 2$ Jetzt setzt man für x Zahlen ein um die dazugehörigen y - Werte zu bekommen.

$D_f = -2 \leq x \leq 2$ Definitionsmenge ist deklariert!

Einsetzen: $y = f(-2) = -12; y = f(-1) = -7; y = f(0) = -2; y = f(1) = 3$
 $y = f(2) = 8$

Im Koordinatensystem



Die roten Punkte markieren die Werte, welche durch das Einsetzen in der Funktion entstehen. Die gestrichelte blaue Linie markiert die Verbindung der Punkte. Es handelt sich im Übrigen um eine **lineare Funktion**.

Hellgrün dargestellt ist die so genannte **Nullstelle**. Dort wo die Wertelinie die x -Achse schneidet.

Schauen wir uns nun einige wichtige Funktionen an.

Die lineare Funktion

Eine Funktion mit der Form $f: x \mapsto y = f(x) = mx + q$ heisst lineare Funktion. Der Graph der linearen Funktion ist eine Gerade mit der Gleichung $y = mx + q$.

Definition

Das **m** ist die Steigung der Gerade welche durch die Gleichung $y = mx + q$ definiert ist. Sie entspricht der „Steilheit“ der Gerade.

Das **q** ist der y-Achsenabschnitt. Er definiert wie weit oberhalb oder unterhalb des Ursprungs (0/0) die Gerade die y-Achse schneidet.

Beispiel 1: $y = f(x) = 2x + 1$ Die Funktion ist jetzt definiert. Setzen wir nun Zahlen für x in die Funktion ein.

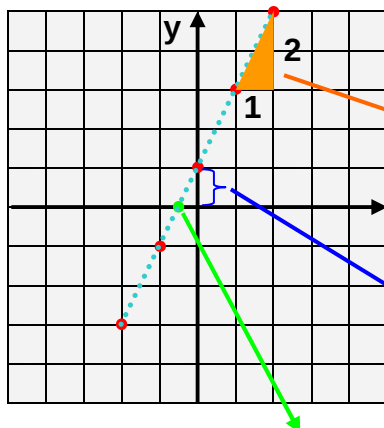
m q

$D_f = -2 \leq x \leq 2$ Definitionsmenge ist deklariert!

Einsetzen:

$y = f(-2) = -3$; $y = f(-1) = -1$; $y = f(0) = 1$; $y = f(1) = 3$
 $y = f(2) = 5$

Im Koordinatensystem



Aus der Gleichung geht folgende hervor: **m = 2** und **q = 1**. Die Steigung ist also 2 und der y-Achsen-abschnitt ist 1. Kontrollieren wir das beim Graphen.

Steigung: Das orange Dreieck hat horizontale Ausrichtung Δx von 1 nach rechts und eine vertikale Δy von 2 nach oben.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$$

y-Achsenabschnitt: Mit $q = 1$ ist dieser definiert. Man sieht, dass die Gerade die y-Achse im Punkt (0/1) schneidet.

Zudem ist die **Nullstelle** (hellgrün) ersichtlich. Wiederum schneidet hier die Wertelinie die x-Achse.

Beispiel 2: $y = f(x) = -3x - 2$ Daraus folgt: **m = -3** und **q = -2**

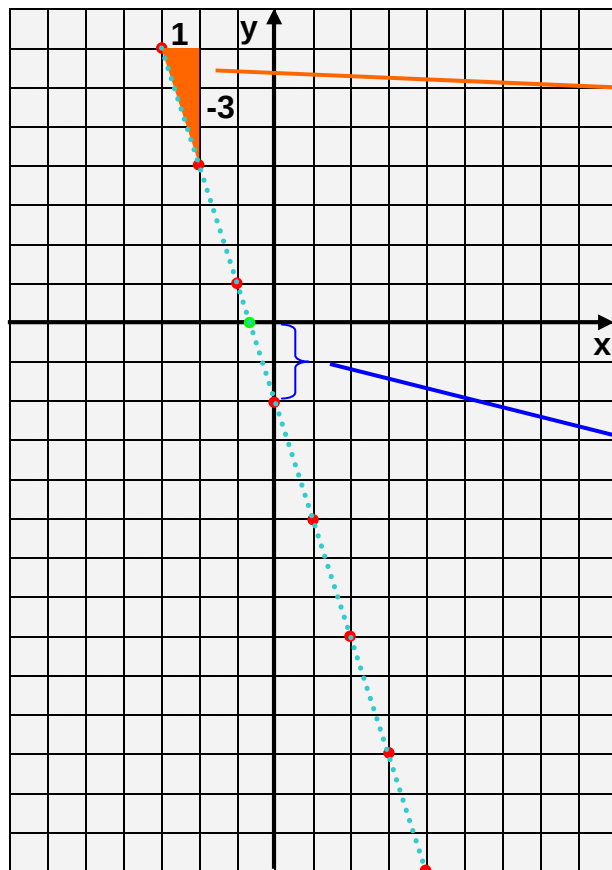
Wir haben also eine negative Steigung und einen negativen y-Achsenabschnitt. Was bedeutet das nun für den Graphen? Legen wir zuerst die Definitionsmenge fest und setzen ein.

$D_f = -3 \leq x \leq 3$ Definitionsmenge ist deklariert!

Einsetzen:

$y = f(-3) = 7$; $y = f(-2) = 4$; $y = f(-1) = 1$; $y = f(0) = -2$;
 $y = f(1) = -5$; $y = f(2) = -8$; $y = f(3) = -11$

Im Koordinatensystem



Die **Steigung** ist negativ, da die Wertelinie von links oben nach rechts unten verläuft. Das orange Dreieck hat eine horizontale Ausrichtung Δx von 1 nach rechts und eine vertikale Δy von 3 nach unten. 3 nach unten bedeutet **-3**.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{1} = -3$$

Der **y-Achsenabschnitt** ist -2 da $q = -2$ definiert ist. Man sieht, dass die Wertelinie die y-Achse im Punkt (0/-2) schneidet.

Zudem ist die **Nullstelle** (hellgrün) ersichtlich. Wiederum schneidet hier die Wertelinie die x-Achse.

Bevor wir nun weitere Funktionen betrachten üben wir das Gelernte.

Aufgaben

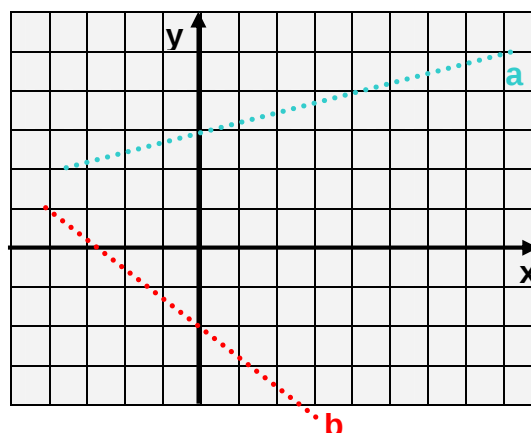
1) $y = f(x) = 2x - 4$ $D_f = -3 \leq x \leq 3$

Setze die 7 Zahlen aus der Definitionsmenge in die Funktion ein und übertrage die Werte in ein Koordinatensystem. Verbinde die Wertepunkte und kennzeichne das Steigungsdreieck, den y-Achsenabschnitt und die Nullstelle.

2a) $y = f(x) = 5x - 4$ Bestimme $f(0)$, $f(3)$, $f(-5)$, $f(-12)$

b) Für welche x gilt $f(x) = 1$, $f(x) = 21$, $f(x) = 6$

3) Lies aus unterem Graph die Steigung und den y-Achsenabschnitt ab und definiere so die Funktion.



Die Quadratfunktion

Eine Funktion mit der Form $f: x \mapsto y = f(x) = ax^2 + c$ heisst quadratische Funktion. Der Graph der linearen Funktion ist eine gebogene Kurve mit Scheitelpunkt welche durch die Gleichung $y = ax^2 + c$ definiert ist.

Definition

Das **a** ist dafür verantwortlich, ob die gebogene Kurve steil ist oder flach. Ist a negativ so ist die gebogene Kurve nach unten geöffnet.

Das **c** ist der y-Achsenabschnitt. Er definiert wie weit oberhalb oder unterhalb des Ursprungs (0/0) die gebogene Kurve die y-Achse schneidet.

Beispiel 1: $y = f(x) = 2x^2 - 3$

$\swarrow$ $\nwarrow$
a **c**

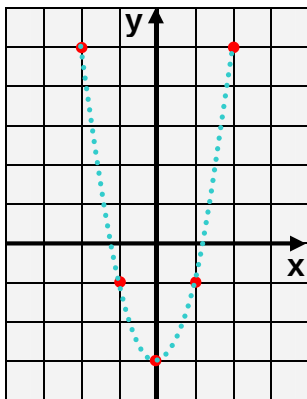
Die Funktion ist jetzt definiert. Setzen wir nun Zahlen für x in die Funktion ein.

$D_f = -2 \leq x \leq 2$ Definitionsmenge ist deklariert!

Einsetzen:

$$\begin{aligned} y &= f(-2) = 5; y = f(-1) = -1; y = f(0) = -3; y = f(1) = -1 \\ y &= f(2) = 5 \end{aligned}$$

Im Koordinatensystem



Man sieht sehr gut wie sich die gebogene Kurve präsentiert.

Da **a = 2** positiv ist die Kurve nach oben geöffnet. Sie ist recht steil, das **a = 2** grösser als 1 ist.

Da **c = -3** ist schneidet die Kurve die y-Achse beim Punkt (0/-3). Dieser Punkt ist gleichzeitig der Scheitelpunkt der Kurve und der bekannte y – Achsenabschnitt.

Alle Kurven der quadratischen Funktion sehen in dieser Form

Beispiel 2: $y = -0.5x^2 + 2$

Daraus folgt: **a = -0.5** und **c = 2**

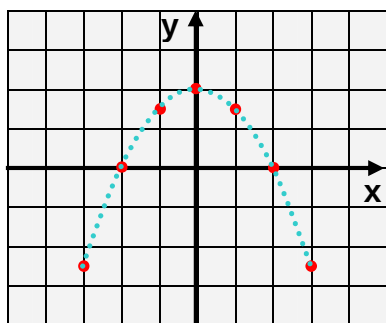
Wir haben ein **a = -0.5** was eine eher flache Kurve bedeuten wird. Da es zudem negativ ist wird sie gegen unten geöffnet sein. Da **c = 2** ist wird der Scheitelpunkt im Punkt (0/2) zu liegen. Legen wir zuerst die Definitionsmenge fest und setzen ein.

$D_f = -3 \leq x \leq 3$ Definitionsmenge ist deklariert!

Einsetzen:

$$\begin{aligned} y &= f(-3) = -2.5; y = f(-2) = 0; y = f(-1) = 1.5; \\ y &= f(0) = 2; y = f(1) = 1.5; y = f(2) = 0; y = f(3) = -2.5 \end{aligned}$$

Im Koordinatensystem



Man sieht es nun sehr gut wie sich die Werte für a und c auf die Kurve ausgewirkt haben. Der Scheitelpunkt liegt wie erwartet im Punkt $(0/2)$.

Zudem ist die Kurve gegen unten geöffnet, auch das konnte man erwarten, da $a = -0.5$ negativ ist.

Die gebogene Kurve ist auch eher flach, da a zwischen -1 und $+1$ liegt.

Aufgaben

1) $y = f(x) = -2x^2 + 5$ $D_f = -4 \leq x \leq 4$

Setze die 9 Zahlen aus der Definitionsmenge in die Funktion ein und übertrage die Werte in ein Koordinatensystem. Verbinde anschließend die Wertepunkte mit einer Linie.

- 2) Zeichne folgende Funktionen alle in das gleiche Koordinatensystem. Nimm immer die gleiche Definitionsmenge. $D_f = -3 \leq x \leq 3$

$$y = f(x) = x^2$$

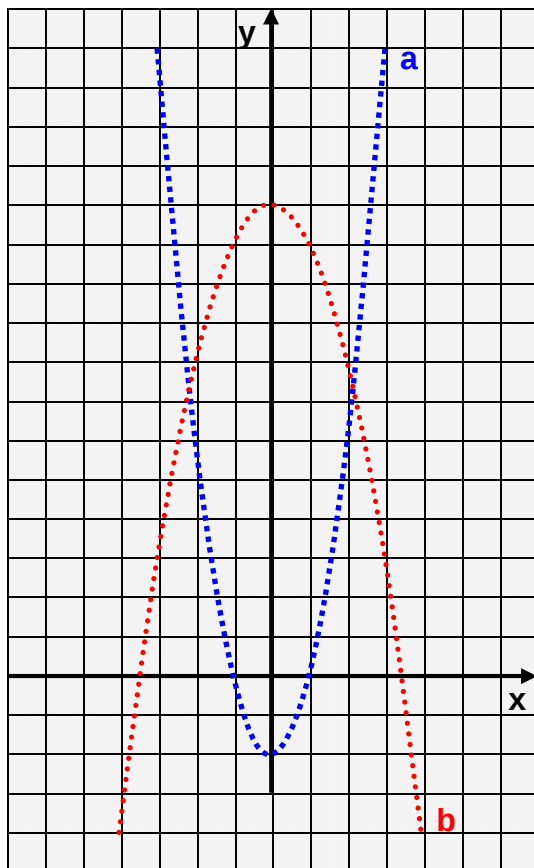
$$y = f(x) = 3x^2$$

$$y = f(x) = 0.5x^2$$

$$y = f(x) = -2x^2$$

Markiere die Kurven mit vier unterschiedlichen Farben!

- 3) Versuche mit Hilfe der Kurven die entsprechenden Funktionen zu bestimmen!



Die Wurzelfunktion

Eine Funktion mit der Form $f: x \mapsto y = f(x) = a\sqrt{x} + c$ heisst Wurzelfunktion. Der Graph der linearen Funktion ist immer flacher werdende Kurve welche durch die Gleichung $y = a\sqrt{x} + c$ definiert ist. Wichtig erscheint folgende Einschränkung. Die Wurzelfunktion lässt keine negativen Werte für x zu.

Definition

Das a bestimmt ob die Kurve schneller flach wird oder nicht. Zudem verläuft die Kurve bei einem negativen Wert für a spiegelverkehrt!

Das c ist der y-Achsenabschnitt. Er definiert wie weit oberhalb oder unterhalb des Ursprungs (0/0) die gebogene Kurve die y-Achse schneidet.

Beispiel 1: $y = f(x) = 3\sqrt{x} + 2$ Die Funktion ist jetzt definiert. Setzen wir nun Zahlen für x in die Funktion ein.

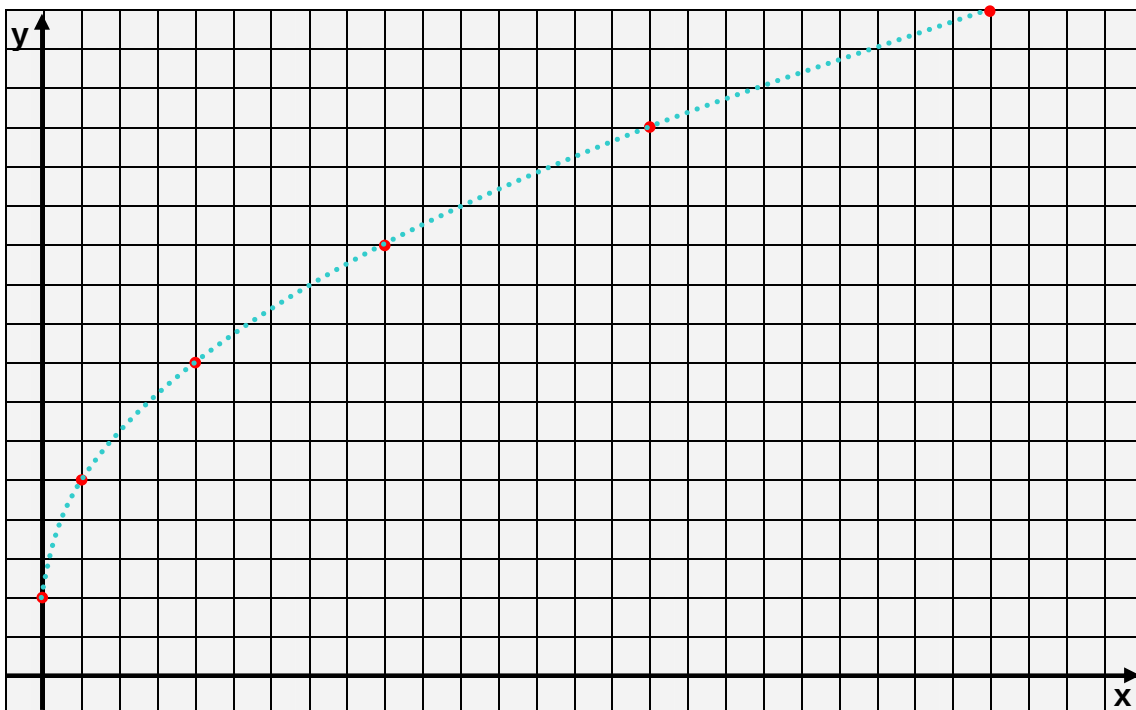
a c

$D_f = \{x=0;1;4;9;16;25\}$ Definitionsmenge ist deklariert!

Einsetzen:

$y = f(0) = 2$; $y = f(1) = 5$; $y = f(4) = 8$;
 $y = f(9) = 11$; $y = f(16) = 14$; $y = f(25) = 17$

Im Koordinatensystem



Man sieht sehr gut das Abflachen der Kurve. Sie beginnt im Punkt (0/2) da $c = 2$ ist. Es entspricht gerade dem **y-Achsenabschnitt**.

Bespiel 2: $y = f(x) = -2\sqrt{x} - 1$

Daraus folgt:

$a = -2$ und $c = -1$

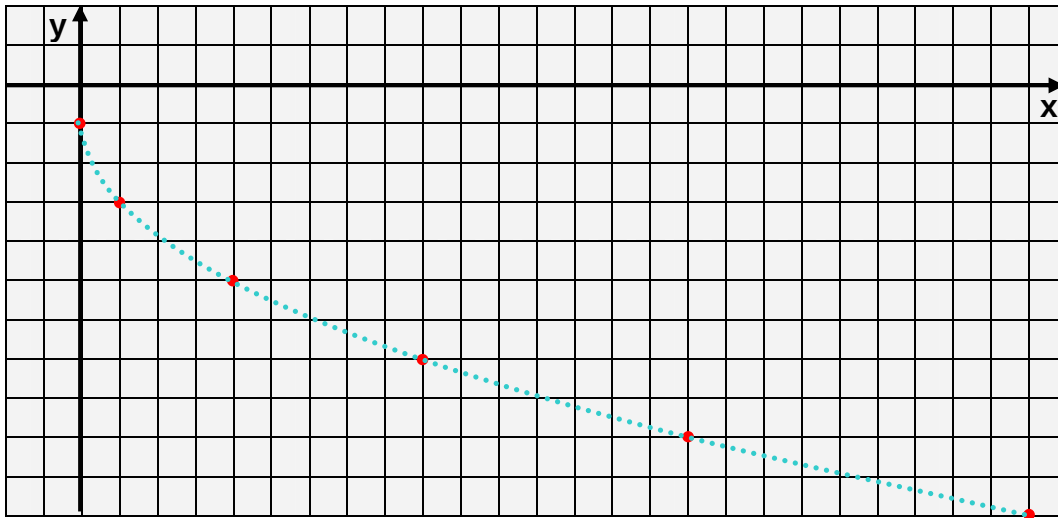
Wir haben ein $a = -2$ was eine eher flache Kurve bedeuten wird. Da es zudem negativ ist wird sie spiegelverkehrt sein. Da $c = -1$ ist wird der Startpunkt der Kurve im Punkt $(0/-1)$ liegen. Legen wir zuerst die Definitionsmenge fest und setzen ein.

$D_f = \{x=0;1;4;9;16;25\}$ Definitionsmenge ist deklariert!

Einsetzen:

$y = f(0) = -1$; $y = f(1) = -3$; $y = f(4) = -5$;
 $y = f(9) = -7$; $y = f(16) = -9$; $y = f(25) = -11$

Im Koordinatensystem



Man erkennt sehr schön wie die Kurve flacher wird. Da $a = -2$ ist die Kurve auf der „unteren“ Seite. Zudem ist der y- Achsenabschnitt durch das $c = -1$ klar definiert. Die Kurve beginnt im Punkt $(0/-1)$.

Aufgaben

1) $y = f(x) = 2\sqrt{x} - 2$ $D_f = \{x=0;1;4;9;16;25\}$

Setze die 6 Zahlen aus der Definitionsmenge in die Funktion ein und übertrage die Werte in ein Koordinatensystem. Verbinde anschließend die Wertepunkte mit einer Linie.

2) $y = f(x) = 7\sqrt{x} - 5$ Bestimme $f(0)$, $f(36)$, $f(-9)$, $f(81)$

3) Zeichne folgende Funktionen alle in das gleiche Koordinatensystem. Nimm immer die gleiche Definitionsmenge. $D_f = \{x=0;1;4;9;16;25\}$

$y = f(x) = \sqrt{x}$ $y = f(x) = 3\sqrt{x}$ $y = f(x) = -2\sqrt{x}$ $y = f(x) = -4\sqrt{x} - 3$

Achtung: Du brauchst dafür eine ganze Seite im Heft, nimm sie quer!!

Markiere die Kurven mit vier unterschiedlichen Farben!

Die Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion wird mit $f^{-1}(x)$ gekennzeichnet. Es werden zuerst x und y vertauscht. Anschließend wird die entstandene Funktion nach y aufgelöst. Hat man dies gemacht erhält man die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Die Wertemenge von f wird zur Definitionsmenge von $f^{-1}(x)$, die Definitionsmenge von f wird zur Wertemenge von $f^{-1}(x)$.

Beispiel 1: $y = f(x) = 2x - 1$

$$D_f = -3 \leq x \leq 3$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} y = f(-3) &= -7 ; y = f(-2) = -5 ; y = f(-1) = -3 ; \\ y = f(0) &= -1 ; y = f(1) = 1 ; y = f(2) = 3 ; y = f(3) = 5 \end{aligned}$$

Wie sieht nun die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ aus?

1. Schritt: x und y vertauschen: $x = 2y - 1$

2. Schritt: nach y auflösen: $y = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

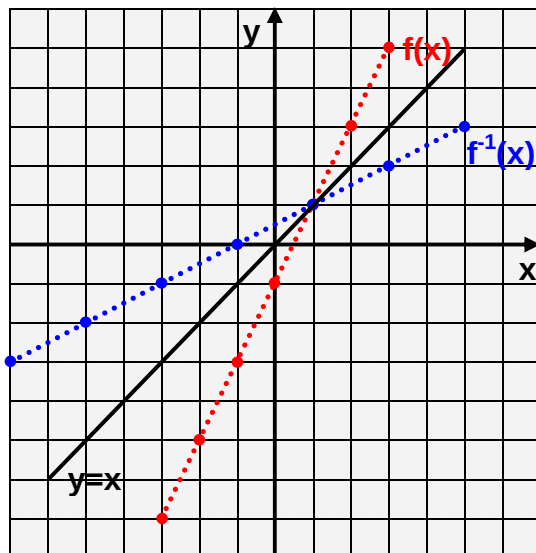
3. Schritt: Kontrolle durch Einsetzen der Wertemenge von oben in die Umkehrfunktion.

Einsetzen:

$$\begin{aligned} y = f^{-1}(-7) &= -3 ; y = f^{-1}(-5) = -2 ; y = f^{-1}(-3) = -1 ; \\ y = f^{-1}(-1) &= 0 ; y = f^{-1}(1) = 1 ; y = f^{-1}(3) = 2 ; y = f^{-1}(5) = 3 \end{aligned}$$

Man sieht sehr gut, wie die Definitionsmenge und die Wertemenge vertauscht wurde.

Im Koordinatensystem



Man erkennt, dass die Funktion $f(x)$ (rot dargestellt) eine lineare Funktion ist. Auch die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ (blau dargestellt) ist eine lineare Funktion. Sie wird an der Winkelhalbierenden $y = x$ gespiegelt.

Merksatz:

Jede lineare Funktion hat eine Umkehrfunktion welche an der Winkelhalbierenden gespiegelt wird.

Wie sieht es nun für eine Quadratfunktion aus? Im Beispiel auf der nächsten Seite werden wir sehen, dass auch dort eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden vollzogen werden kann. Etwas wird aber anders sein.

Beispiel 2: $y = f(x) = x^2 + 1$

$$D_f = -4 \leq x \leq 4$$

Einsetzen: $y = f(-4) = 17$; $y = f(-3) = 10$; $y = f(-2) = 5$; $y = f(-1) = 2$;
 $y = f(0) = 1$; $y = f(1) = 2$; $y = f(2) = 5$; $y = f(3) = 10$; $y = f(4) = 17$

Wie sieht nun die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ aus?

1. Schritt: x und y vertauschen: $x = y^2 + 1$

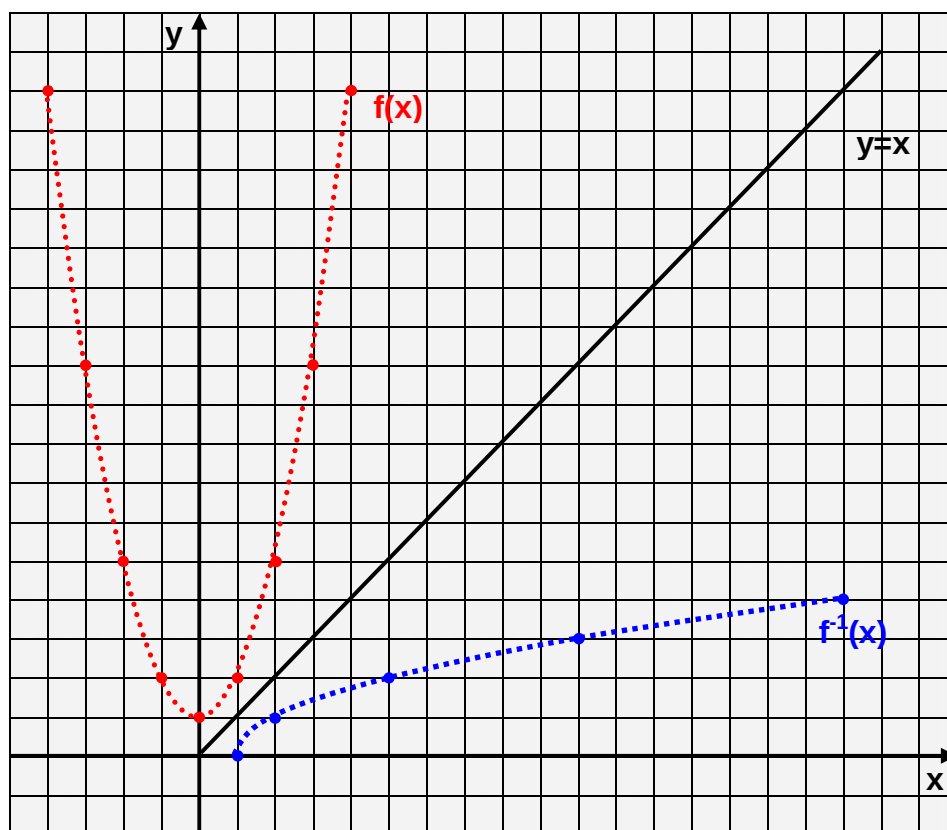
2. Schritt: nach y auflösen: $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

3. Schritt: Kontrolle durch Einsetzen der Wertemenge von oben in die Umkehrfunktion. **Achtung:** Unter der Wurzel keine negative Zahl.

Einsetzen: $y = f^{-1}(17) = 4$; $y = f^{-1}(10) = 3$; $y = f^{-1}(5) = 2$; $y = f^{-1}(2) = 1$;
 $y = f^{-1}(1) = 0$

Für alle weiteren Werte für $x < 1$ in der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ gibt es keine Lösung.

Im Koordinatensystem



Man erkennt sehr gut, dass die Umkehrfunktion einer Quadratfunktion die Wurzelfunktion ist. Da unter der Wurzel keine negative Zahl stehen darf ist von der blauen Kurve nur die „Hälfte“ da.

Auch hier erkennt man die Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$.

Aufgaben

- 1) Bestimme die Umkehrfunktion von $y = f(x) = -4x + 2$ $D_f = -4 \leq x \leq 4$
- 2) Bestimme die Umkehrfunktion von $y = f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ $D_f = \{x=0;1;4;9;16;25\}$

Übertrage in beiden Aufgaben die Funktion und die Umkehrfunktion in ein Koordinatensystem.