

Kapitel 8: Funktionen

In der Mathematik ist eine **Funktion** eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Funktionsargument, unabhängige Variable, x-Wert) genau ein Element der anderen Menge (Funktionswert, abhängige Variable, y-Wert) zuordnet. Das Konzept der Funktion oder Abbildung nimmt in der modernen Mathematik eine zentrale Stellung ein. (aus wikipedia)

Die Ausgangsmenge A heisst **Definitionsmenge** D_f der Funktion f. Ihre Elemente bezeichnet man häufig mit x.

Die Menge B der zugeordneten Elemente nennt man **Wertemenge** W_f der Funktion f. Ihre Elemente bezeichnet man häufig mit y; man nennt y Funktionswert von x.

Schreibweise: $f: A \rightarrow B$, $x \rightarrow y = f(x)$

Darstellung als: Wertetabelle oder Funktionsgraph oder Funktionsgleichung!

Im Mathematikunterricht haben wir bereits verschiedene Funktionen kennen gelernt. So wurden die Proportionalität, die umgekehrte Proportionalität, die Quadrat- und die Wurzelfunktion behandelt. Zudem haben wir schon verschiedene interessante Funktionsgraphen gezeichnet und interpretiert.

1. Repetition

- a. Ein Maler streicht verschieden grosse Wohnungen. Für ein Zimmer braucht er normalerweise etwa 6 Stunden.

x-Achse: Grösse der Wohnung in Anzahl Zimmer

y-Achse: Arbeitszeit in h

Wertetabelle:

--	--

Funktionsgleichung:

.....

Funktionsgraph:



- b. Erzähle in Worten, was die Autofahrer A, B und C erleben.

.....

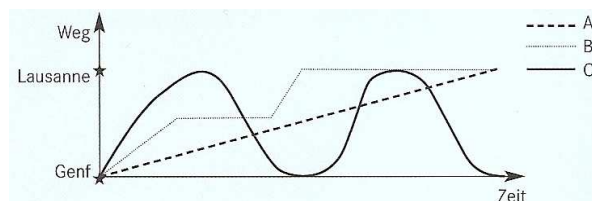
.....

.....

.....

.....

.....



Kapitel 8: Funktionen

c. Sind die folgenden Grössen zueinander proportional?

	<u>Grösse A</u>	<u>Grösse B</u>	<u>proportional?</u>
a)	Äpfel	Preis	
b)	Geschwindigkeit	Weg	
c)	Tage	Zins	
d)	Dichte	Masse	
e)	Zeit	Geschwindigkeit	
f)	Grundstückgrösse	Kaufpreis	

Eine Funktion ist dann proportional, wenn

.....

.....

d. Die Formel für den freien Fall (ohne Luftwiderstand) lautet: $t = \sqrt{s : 5}$, wobei t die Fallzeit in Sekunden und s die Fallhöhe in Meter bedeuten. Dies ist eine Quadratwurzelfunktion!

Wertetabelle:

--	--

Graph:



e. Funktionen können – wie bereits erwähnt – in einem Koordinatensystem, als Wertetabelle oder als Funktionsgleichung dargestellt werden. Funktionen sind also oft Formeln mit zwei Variablen, x und y ! Welche der drei Punkte liegen auf der Geraden mit der Gleichung $y = -0.3x + 7/8$? Falls ein Punkt nicht auf der Geraden liegt, muss seine y -Koordinate angepasst werden!

A(10 / -2.125)

B(-2.6 / 1.655)

C(100 / -21.25)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Es gilt also:

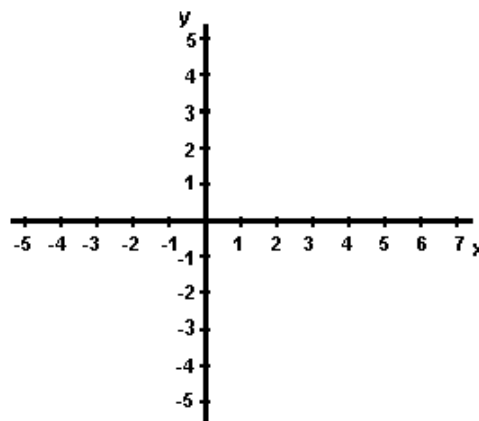
Punkte liegen dann auf einer Geraden,

.....

.....

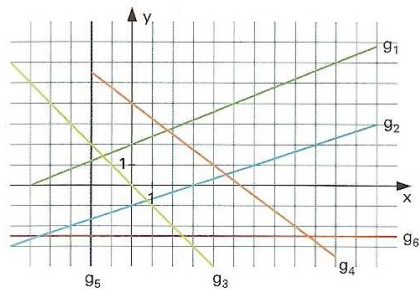
.....

.....



Kapitel 8: Funktionen

2. Geraden im Koordinatensystem



I	x	-2	0	2	5	10
	y	2	0	-2	-5	-10
II	x	-2	0	2	5	10
	y	-2.5	-2.5	-2.5	-2.5	-2.5
III	x	-2	0	2	5	10
	y	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
IV	x	-2	0	2	5	10
	y	6.5	4	2.5	0.25	-3.5
V	x	-2	0	2	5	10
	y	1.2	2	2.8	4	6
VI	x	-2	-2	-2	-2	-2
	y	4	2	1	0	-1

Gleichung 1	$y = -x$
Gleichung 2	$y = \frac{2}{5}x + 2$
Gleichung 3	$y = \frac{1}{3}x - 1$
Gleichung 4	$y = -2.5$
Gleichung 5	$x = -2$
Gleichung 6	$y = -\frac{3}{4}x + 4$

- a. Ordne jeder Gleichung die entsprechende Wertetabelle und den entsprechenden Graphen zu!

Gleichung 1 gehört zu...	Tabelle _____	und zur Geraden _____
Gleichung 2 gehört zu...	Tabelle _____	und zur Geraden _____
Gleichung 3 gehört zu...	Tabelle _____	und zur Geraden _____
Gleichung 4 gehört zu...	Tabelle _____	und zur Geraden _____
Gleichung 5 gehört zu...	Tabelle _____	und zur Geraden _____
Gleichung 6 gehört zu...	Tabelle _____	und zur Geraden _____

- b. Begründe, warum der Punkt (20/10) auf der Geraden g_1 liegt!
- c. Begründe, warum der Punkt (11/ - 4) nicht auf der Geraden g_4 liegt.
- d. Welche y-Koordinate muss der Punkt S (30/ y) haben, damit er auf der Geraden g_3 liegt?

Beziehung zwischen Geraden

Gegeben ist eine Gerade durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 3$! Erstelle eine Wertetabelle für diese Gerade und stelle sie in einem Koordinatensystem dar. Spiegle anschliessend diese Gerade an der y-Achse. Erstelle dazu eine passende Tabelle. Beschreibe diese Gerade durch eine Gleichung.

Kapitel 8: Funktionen

3. Ganz einfach Gerade (aus mathbu.ch 9+, Umgebung 4)

R E C H N U N G							
Periode 01. 10. 01 bis 31. 03. 02		Datum 17. 04. 02		Faktura Nr. 1049			
Tarif	Zähler Nr.	Stand alt	Stand neu	Verbrauchte Menge	Einheit	Ansatz	Betrag CH
TN-D HT	119.115	540	1690	1150	kWh	0.244	280.60
Grundtaxe TN-D						33.00	
Akonto Strom						-170.00	
Total Strom							143.60
MWSt. Nummer 304.391		Code 7.6%		Umsatz 313.60		Ansatz 7.6	
Total Mehrwertsteuer							23.85
Total netto innert 30 Tagen							167.45
Unser Guthaben							167.45

Lineares Wachstum (oder lineare Abnahme) beschreibt einen speziellen Zusammenhang zwischen zwei Grössen. Nimmt die eine Grösse immer um denselben Wert zu, so nimmt die andere Grösse auch immer um einen gleichen Wert zu (oder ab). Lineares Wachstum lässt sich mathematisch beschreiben durch die Gleichung $y = a \cdot x + b$.

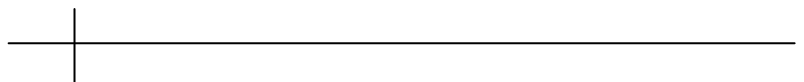
Lineares Wachstum

- 1
 - A Erklärt einander, was die einzelnen Angaben in der Rechnung bedeuten. Fragt nach, was ihr nicht versteht.
 - B Man möchte aus einem Graphen direkt ablesen können, wie viel man für den reinen Gebrauch ohne Grundtaxe und ohne Mehrwertsteuer bezahlen muss. Zeichne einen entsprechenden Graphen im Bereich von 0 und 3000 kWh.
 - C Suche eine Formel, mit der sich aus einem bestimmten Verbrauch der Betrag von Aufgabe B berechnen lässt.
 - D Zeichne einen Graphen, der die Grundtaxe, nicht aber die Mehrwertsteuer berücksichtigt. Suche eine entsprechende Formel
 - E Zeichne einen Graphen, der die Grundtaxe und die Mehrwertsteuer berücksichtigt. Suche eine entsprechende Formel.
- 2
 - A Begründe, warum es sich bei den Graphen aus Aufgabe 1 um lineares Wachstum handelt.
 - B Welche Bedeutung haben die Variablen x und y in Aufgabe 1?
 - C Welche Bedeutung haben der Faktor a und der Summand b in Aufgabe 1?

Lösungen zu 1

A.

B. Wertetabelle



C. Formel

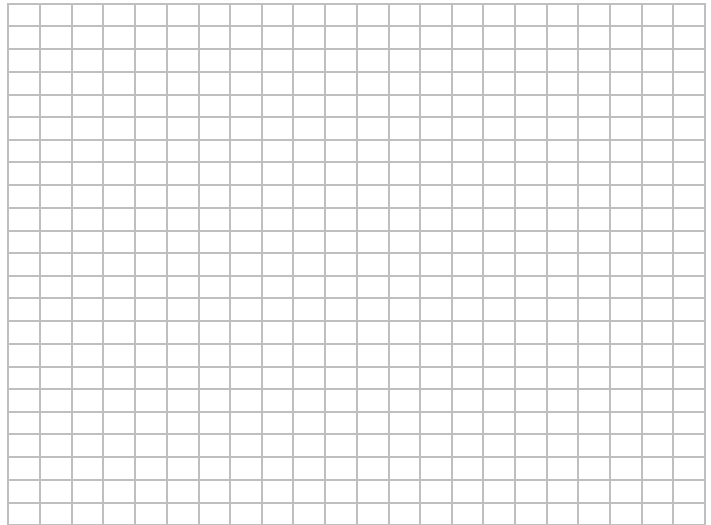
.....

Kapitel 8: Funktionen

D. Formel

Graph für B (blau), D (grün) und E (rot)

.....



E. Formel

.....

Lösungen zu 2

A.
.....
.....
.....

B.
.....
.....

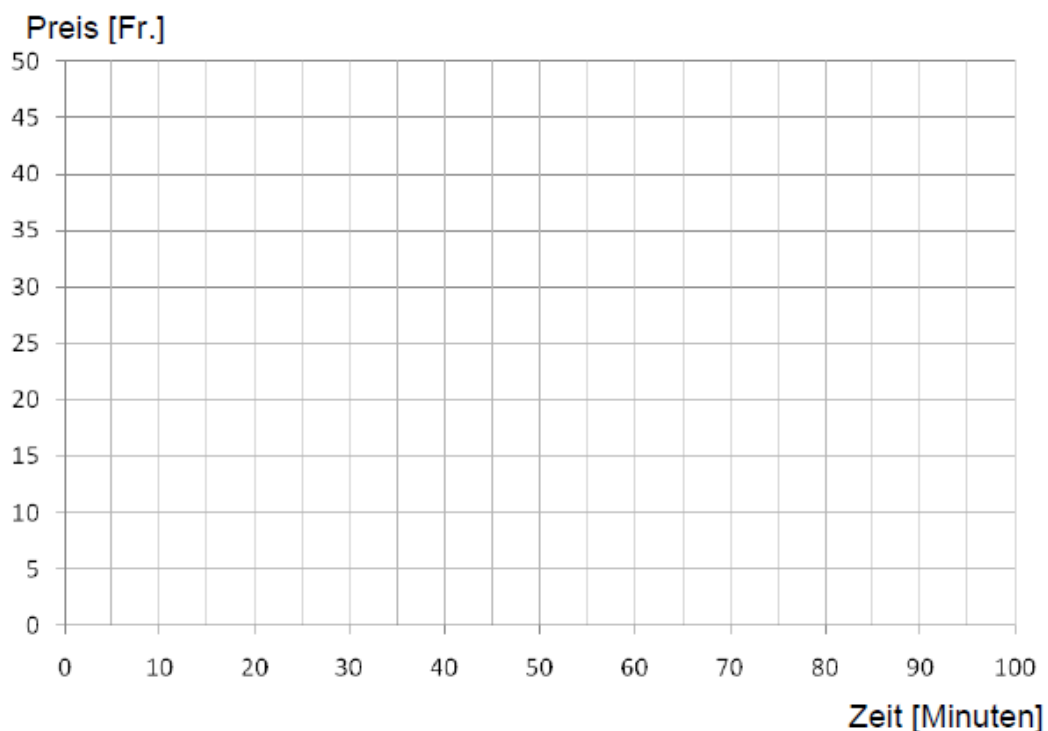
C.
.....
.....
.....
.....
.....
.....

4. Luca's Mobiltelefon

Luca kauft sich ein Mobiltelefon. Ihm werden unterschiedliche Tarife angeboten:

- Angebot 1: Grundpreis pro Monat 10 CHF, Kosten pro Minute 0.15 CHF
- Angebot 2: Grundpreis pro Monat 0 CHF, Kosten pro Minute 0.45 CHF
- Angebot 3: Grundpreis pro Monat 0 CHF,
Telefonieren von 0 bis 50 Minuten: Kosten pro Minute CHF 0.60,
Telefonieren ab 50 Minuten: Kosten pro Minute CHF 0.10

- a) Stellen Sie die drei Tarife im gleichen Koordinatensystem dar.
b) Betrachten Sie Angebot 1 und 2. Wann lohnt sich welches der beiden Angebote?
(keine Berechnung nötig)



Das Angebot 1 lohnt sich dann, wenn...

.....

.....

.....

Das Angebot 2 lohnt sich dann, wenn...

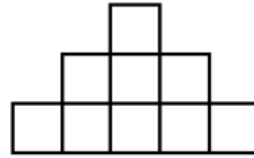
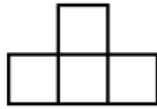
.....

.....

.....

5. Eine Zahlenfolge als Funktion

Füllen Sie die Tabelle aus und stellen Sie einen Term für die letzte Spalte auf.



Figur 1

2

3

Figur	1	2	3	4	5	10	x
Umfang der Figur	4	10					
Umfang der untersten Schicht	4	8					

.....

.....

.....

.....

.....



Kapitel 8: Funktionen

6. Die lineare Funktion

Eine Funktion mit der Form $f: x \rightarrow y = f(x) = mx + q$ heisst lineare Funktion. Der Graph der linearen Funktion ist eine Gerade mit der Gleichung $y = mx + q$ (oder $y = ax + b$).

Definition

Das m ist die Steigung der Gerade welche durch die Gleichung $y = mx + q$ definiert ist. Sie entspricht der „Steilheit“ der Gerade.

Das q ist der y-Achsenabschnitt. Er definiert wie weit oberhalb oder unterhalb des Ursprungs (0/0) die Gerade die y-Achse schneidet.

Beispiel 1: $y = f(x) = 2x + 1$ Die Funktion ist jetzt definiert. Setzen wir nun Zahlen für x in die Funktion ein.

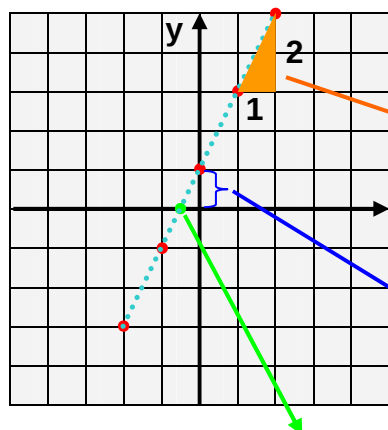
m q

$D_f = -2 \leq x \leq 2$ Definitionsmenge ist deklariert!

Einsetzen:

$y = f(-2) = -3; y = f(-1) = -1; y = f(0) = 1; y = f(1) = 3$
 $y = f(2) = 5$

Im Koordinatensystem



Aus der Gleichung geht folgende hervor: $m = 2$ und $q = 1$. Die Steigung ist also 2 und der y-Achsenabschnitt ist 1. Kontrollieren wir das beim Graphen.

Steigung: Das orange Dreieck hat horizontale Ausrichtung Δx von 1 nach rechts und eine vertikale Δy von 2 nach oben.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$$

y-Achsenabschnitt: Mit $q = 1$ ist dieser definiert. Man sieht, dass die Gerade die y-Achse im Punkt (0/1) schneidet.

Zudem ist die **Nullstelle** (hellgrün) ersichtlich. Wiederum schneidet hier die Wertelinie die x-Achse.

Beispiel 2: $y = f(x) = -3x - 2$ Daraus folgt: $m = -3$ und $q = -2$

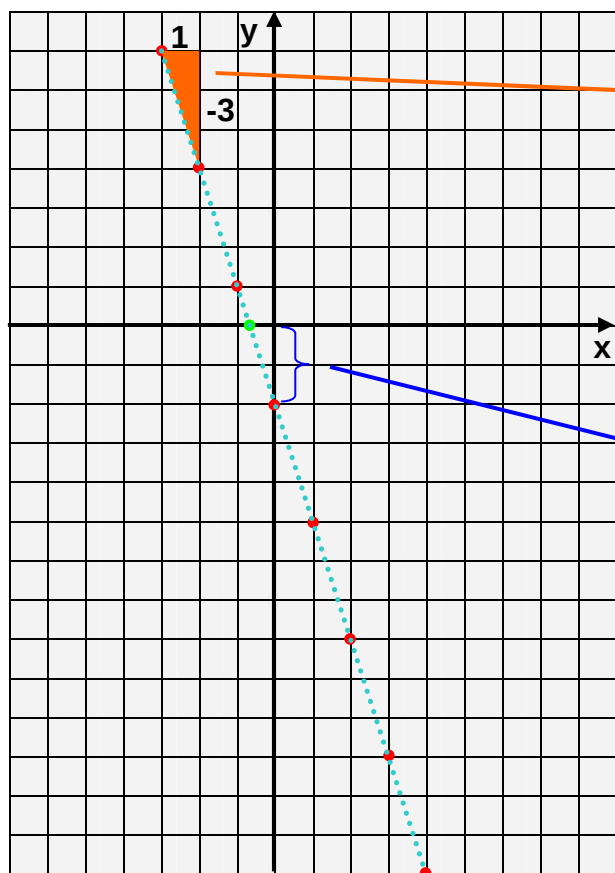
Wir haben also eine negative Steigung und einen negativen y-Achsenabschnitt. Was bedeutet das nun für den Graphen? Legen wir zuerst die Definitionsmenge fest und setzen ein.

$D_f = -3 \leq x \leq 3$ Definitionsmenge ist deklariert!

Einsetzen:

$y = f(-3) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
 $y = f(-2) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
 $y = f(-1) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
 $y = f(0) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
 $y = f(1) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
 $y = f(2) = \dots\dots\dots = \dots\dots$
 $y = f(3) = \dots\dots\dots = \dots\dots$

Im Koordinatensystem



Die **Steigung** ist negativ, da die Wertelinie von links oben nach rechts unten verläuft. Das orange Dreieck hat eine horizontale Ausrichtung Δx von 1 nach rechts und eine vertikale Δy von 3 nach unten. 3 nach unten bedeutet **-3**.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{1} = -3$$

Der **y-Achsenabschnitt** ist -2 da $q = -2$ definiert ist. Man sieht, dass die Wertelinie die y-Achse im Punkt (0/-2) schneidet.

Zudem ist die **Nullstelle** (hellgrün) ersichtlich. Wiederum schneidet hier die Wertelinie die x-Achse.

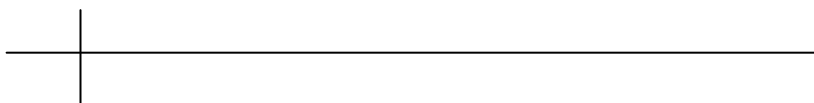
Bevor wir nun weitere Funktionen betrachten üben wir das Gelernte.

Ein paar Aufgaben

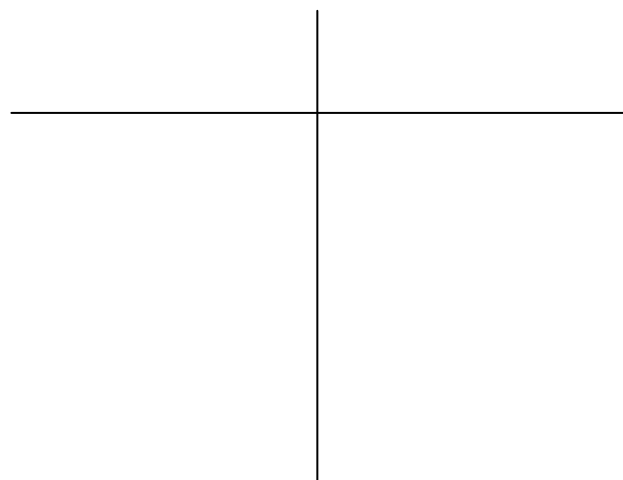
1) $y = f(x) = 2x - 4$ $D_f = -3 \leq x \leq 3$

Setze die 7 Zahlen aus der Definitionsmenge in die Funktion ein und übertrage die Werte in ein Koordinatensystem. Verbinde die Wertepunkte und kennzeichne das Steigungsdreieck, den y-Achsenabschnitt und die Nullstelle.

Wertetabelle:



Graph:



Kapitel 8: Funktionen

- 2) a) $y = f(x) = 5x - 4$ Bestimme $f(0)$, $f(3)$, $f(-5)$, $f(-12)$

.....

.....

.....

.....

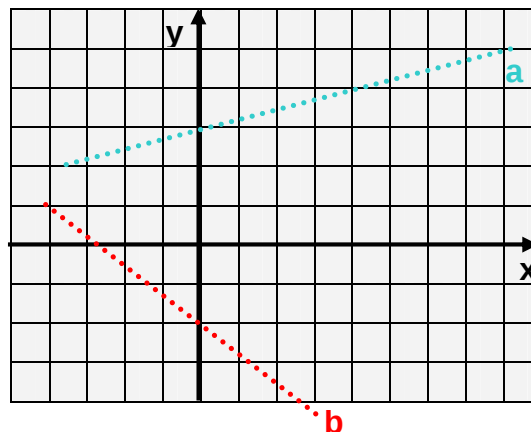
- b) Für welche x gilt $f(x) = 1$, $f(x) = 21$, $f(x) = 6$

.....

.....

.....

- 3) Lies aus unterem Graph die Steigung und den y- Achsenabschnitt ab und definiere so die Funktion mit einer Gleichung.



Gerade a:

.....

.....

.....

Gerade b:

.....

.....

.....